



TITLE:

Pedagogical practice cases of some trajectories with dynamic geometry software (Mathematical Software and Education : Study on effective use of Mathematical Software)

AUTHOR(S):

濱田, 龍義

---

CITATION:

濱田, 龍義. Pedagogical practice cases of some trajectories with dynamic geometry software (Mathematical Software and Education : Study on effective use of Mathematical Software). 数理解析研究所講究録 2013, 1865: 185-189

ISSUE DATE:

2013-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/195363>

RIGHT:

# Pedagogical practice cases of some trajectories with dynamic geometry software

濱田龍義

福岡大学理学部/JST CREST

TATSUYOSHI HAMADA

FUKUOKA UNIVERSITY/JST CREST \*

## Abstract

2007 年以降、複数の大学において学部生、大学院生を対象として集中講義を行い数学ソフトウェアの紹介を行ってきた。4 日間もしくは 5 日間の集中講義の間に、主に動的幾何学ソフトウェアを用いて数学の様々な概念について可視化を行うことを目指した。本稿はこれらの集中講義に関する教育事例報告である。

## 1 KNOPPIX/Math と MathLibre

我々は 2003 年 2 月に KNOPPIX/Math という数学ソフトウェアプロジェクトを開始した。KNOPPIX は Live Linux の一種であり、ドイツの Klaus Knopper によって始められたプロジェクトである。KNOPPIX は Linux やオープンソースソフトウェアのデモンストレーション用、また、非常時の緊急用システム、教育環境の構築などの用途で有名である。KNOPPIX は、優れたハードウェア認識能力を持ち、CD/DVD からの起動について最適化されているため、数ある Live Linux の中でも極めて高速に起動させることができる。

KNOPPIX/Math はオープンソースの数学ソフトウェアや関連するフリードキュメントを KNOPPIX 上で提供するプロジェクトである。KNOPPIX/Math を用いれば、誰でも容易に数学ソフトウェア環境を構築することが可能である。プロジェクトの開始以来、継続的に開発を進めており、毎年 3 月に新しい版を作成、公開している。国際的にも展開しており、2005 年 12 月に韓国ソウルの KIAS で行われた ASCM2005 (Asian Symposium on Computer Mathematics) で KNOPPIX/Math/2005 CD 韓国語版の展示、配布を行った。2006 年夏には、神戸大学の高山信毅氏の協力の元に、スペインのマドリードで開催された国際数学会議に Mathsoftware.org として出展し、最初の DVD 版である KNOPPIX/Math/ICMS2006 の展示、配布を行った。これは、サテライトカンファレンスである国際数学ソフトウェア会議 ICMS2006 の公式配布物として作成されたものである。2008 年からは、JST CREST 日比チームによる研究プロジェクト「現代の産業社会とグレブナー基底の調和」に参加し、KNOPPIX/Math 上に用意された高速なグレブナー基底計算ソフトウェアの紹介を行っている。

KNOPPIX/Math は Live DVD の形態で配布されているが、USB 起動 Linux 作成用スクリプト flash-knoppix が用意されている。USB 起動は DVD 起動に比べて高速で稼働すること、ホームディレクトリ等の作業領域を継続的に維持できることなどの長所を持っている。また、神戸大学からは仮想マシンソフトウェア VMware を用いた起動形態が提供されており、Windows や MacOS 上で日常的に利用可能な環境として利用されている。

---

\*hamada@holst.sm.fukuoka-u.ac.jp

このように数学ソフトウェア紹介の媒体として一定の知名度を得た KNOPPIX/Math であるが、開発環境の見直しを検討した結果、2012 年 3 月に MathLibre と名称を変更した。最新の数学研究ツールや可視化ツール、数式処理システムを備えた MathLibre は研究ツールとしてだけでなく、教育においても活用されており、複数の大学において、実習、および自習環境として紹介されている。

2007 年に神戸大学で集中講義を行う機会を得て以来、山口大学、大阪教育大学、島根大学、首都大学東京において数学ソフトウェアに関する集中講義を行ってきた。また、非公式なものであるが、2012 年には韓国の高麗大学校においても 3 日間の集中講義を行う機会を得た。本稿では、これらの集中講義における教育実践事例について述べる。

## 2 Dynamic Geometry Software

集中講義で数学ソフトウェアを紹介するにあたって、動的幾何学ソフトウェアに注目した。初期の動的幾何学ソフトウェアとしては、1980 年代に Apple II 上に実装された Geometric Supposer が知られている。これは Judah L. Schwarz をリーダーとする MIT のチームによって開発が行われた。一方、1985 年には Jean-Marie Laborde によって Cabri の開発が始まっている。Cabri の最初のバージョンは 1986 年に Apple II 上に実装された。また、同時期に Swarthmore College では Visual Geometry Project と呼ばれる研究プロジェクトが立ち上がっており、Nicholas Jackiw が中心となって Geometer's Sketchpad の開発が始められた。1990 年代後半には Jürgen Richter-Gebert と Ulrich Kortenkamp [2] によって Cinderella が発表される。Cinderella は他の動的幾何学ソフトウェアと異なり、図形の内部表現に複素数を用いている点特徴的である。一方、日本国内においては愛知教育大学の飯島康之氏によって 98/DOS の時代から GC(Geometric Constructor) の開発が行われており、Windows 版、Java 版、HTML5 版と形を変えながら、多くの教育実践事例を蓄積している [3]。

GC は自由にダウンロードできるソフトウェアであるが、その他の 4 つのソフトウェアは全て商用ソフトウェアである。ただし Cinderella については、現在ダウンロード可能な版が存在する。一方で、オープンソースソフトウェアとしてソースコードをオープンソースライセンスの元に開示し、自由に利用、改変、再配布できる動的幾何学ソフトウェアも多数存在する。実際、MathLibre には幾つものオープンソース動的幾何学ソフトウェアが収録されている。Ilya Balan によって開発された KSEG もまた、MathLibre に収録されているソフトウェアの一つである。MIT の学生であった Ilya Balan は KSEG をオープンソースライセンスで公開した。KSEG は Qt と呼ばれるツールキットを利用しており、Unix や Windows 上で軽快に動作する。Geometer's Sketchpad に影響を受けており、点主導のユーザーインターフェースを備えている。例えば KSEG で線分を作成する際には、最初に 2 点をマウスの右クリックで作成しなければいけない。一見すると煩雑な操作に見えるかもしれないが、慣れてくると細かな作図にも対応しやすく、複雑な図形にも対応しやすいインターフェースである。KSEG では「幾何学的オブジェクト」として、点、線分、半直線、直線、円、円弧等を作成できる。また、2 点間の距離、線分の長さ、円の半径、円周、角度、比、傾き、面積等の計測が可能である。回転、平行移動、拡大縮小、鏡映等の変換が用意されており、幾何的な拘束条件から得られる点の軌跡を描画することができる。簡易スクリプト機能を備えており、作図手順の保存、導入が可能である。

### 2.1 平面曲線

実際の講義では、KSEG を用いて様々な平面曲線を描くことから始めた。例えば楕円は 2 点からの距離の和が一定な点の軌跡として実現される。黒板で楕円を描くには閉じた細紐を用いるが、KSEG で同じこ

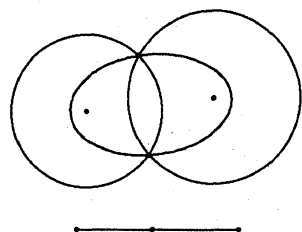


図 1: 楕円

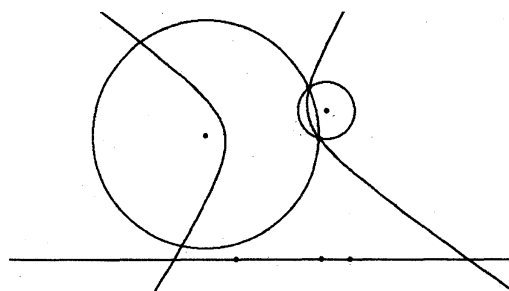


図 2: 双曲線

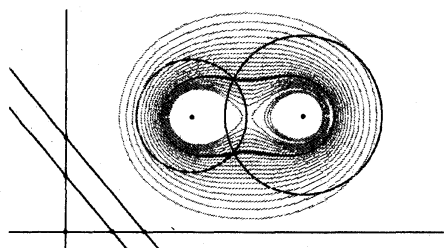


図 3: カッシーニの卵形線

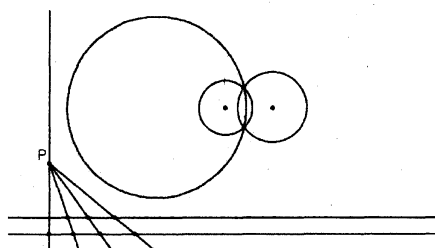


図 4: アポロニウスの円

とを実現するためには、ある種のコントローラを図形的に作成する。楕円の場合には、ある一定の長さの線分を用意し、線分を内分する点を作成する。この内分点によって得られる2線分の長さを半径とする2円を描き、線分の内分点を動かしたときの2円の交点の軌跡を描けばよい。

2点からの距離の和が一定な点の軌跡と同様に、差、積、商が一定な点の軌跡も同様にして図形的に描くことが可能である。それぞれ、双曲線、カッシーニの卵形線、アポロニウスの円となる。また、焦点と準線からの距離が等しい点の軌跡を作れば放物線が得られる。ここでは具体的なコントローラの作成方法については述べないが、平行移動、回転等の変換を利用することで、アルキメデスの螺旋線や伸開線、擺線、星芒形などの作成も容易に可能である。実習を通して、このような曲線の描画方法を考えることは学生にとっても新鮮な体験であり、幾何的な変換について考える良い機会となっている。このような曲線の構成について、より詳しく知りたい方には [4], [5], [6] を参考文献として紹介する。

コントローラによって平面曲線を描くアイディアは、複素関数を考える上でも有益なものである。複素関数は学生にとって若干敷居が高いものであるが、動的幾何学ソフトウェアを利用することで、可視化を行

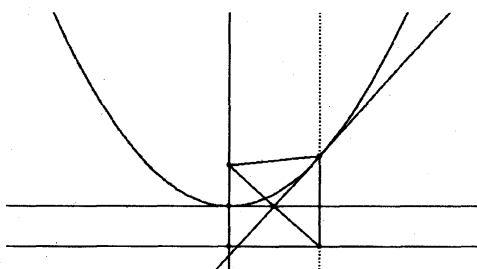


図 5: 放物線

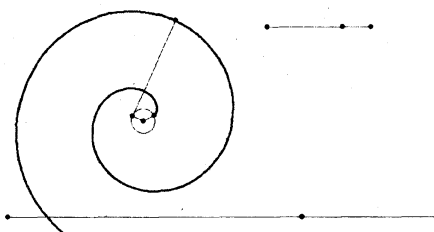


図 6: 伸開線

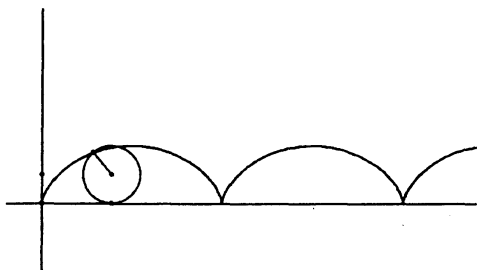


図 7: 擺線

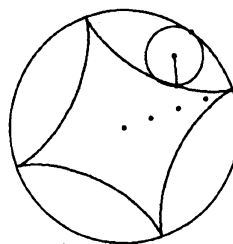


図 8: 星芒形

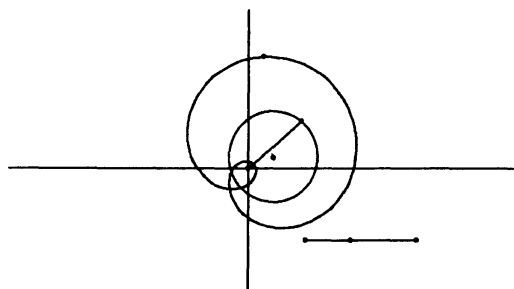
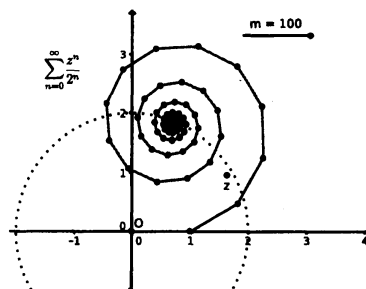
図 9: 複素函数  $w = z^2$ 

図 10: GeoGebra による級数の部分和

い、実験によって理解を深めることができる。例えば、動的幾何学ソフトウェアの画面をガウス平面と見立てて複素函数  $w = z^2$  を考える、ガウス平面内の単位円上の点がどこに写るかを軌跡機能を利用して動的に観察することができる。KSEG には複素座標系を直接取り扱う機能は用意されていないが、このように幾何的な意味づけを考えることは可能である。学生に対する教育効果を考える上でも、動的幾何学ソフトウェア上で複素函数の幾何学的な意味づけを考えることは有意義と思われる。なお、参考までに GeoGebra [7] という別のソフトウェアについては、部分的にはあるが複素座標系に対応している。さらに、簡易プログラミング機能も備えているため、級数の部分和を描画することで収束半径等について実証を行い、実験結果を観察することができる。その他にも、講義では KSEG の再帰的なプログラミングについても紹介し、ベジェ曲線やコッホ曲線等の作成を行った。グラフィカルで自然な操作で図形の再帰構造を定義できる機能は学生の興味を強く引いたようであった。

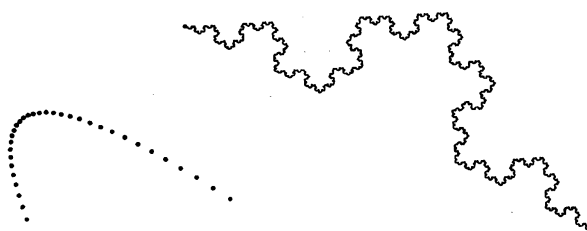


図 11: ベジェ曲線とコッホ曲線

## 2.2 実演による評価

集中講義では可能な限り最終日に発表会を課した。また、終了後のレポートを課し、合せて成績評価を行った。集中講義の短い期間ではあるが、学んだことを生かし、動的幾何学ソフトウェアを用いてこれまでに学んだ数学を表現することを目指した。多くの学生が、限られた時間にも関わらず、オリジナリティにあふれる作品を作成しており、真剣に取り組んでいたように思われる。なお、発表会では学生自身にも友人の作品の評価を行うことを求め、数学点、芸術点、技術点の3種類の評価を行ってもらった。自分の作品が他の学生から評価されるということもあり、多くの学生が課題に集中して取り組んでいた。このようなオリジナリティを要求する課題は、他の学生の結果を安易に複製することもできず、普段とは違う角度から数学に取り組む良い機会となったのではないかと思われる。ただ、発表会という形態は、受講者の人数が限られている場合のみ実行可能であり、注意が必要である。

## 3 終わりに

動的幾何学ソフトウェアを題材とした数学の可視化は、学生からの評価も高く、彼らの意識になんらかの影響を与えたのではないかと考えている。教育に数学ソフトウェアを用いることについて、特に数学への理解が深まるかどうかについては諸説あると思うが、適切に設計された数学ソフトウェアのインターフェースは数学を理解し、考察する上で支援する存在となるのではないだろうか。現在、動的幾何学ソフトウェアと数式処理システムが融合した GeoGebra が注目を浴びつつあるが、動的幾何学ソフトウェアは、我々が考えている以上に様々な教育への応用を秘めているのではないかと感じている。

## 参 献

- [1] MathLibre Project, <http://www.mathlibre.org/>
- [2] シンデレラ: 幾何学のためのグラフィックス, Jürgen Richter-Gebert, Ulrich Kortenkamp 著, 阿原一志訳 (2003) シュプリンガー東京.
- [3] 愛教大 飯島研究室, <http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/iijima.htm>
- [4] 曲線の事典 一性質・歴史・作図法一, 磯田正美, 田端毅, 讃岐 勝 著, Maria G. Bartolini Bussi 編 (2009) 共立出版.
- [5] 直線と曲線ハンディブック, Victor Gutenmacher, N.B. Vasilyev 著, 蟹江幸博, 佐波学 訳 (2006) 共立出版.
- [6] カーブ, Lockwood E. H 著, 松井政太郎 訳, (1964) みすず書房.
- [7] GeoGebra, <http://www.geogebra.org/>